

# PROBABILIDAD Y ESTADÍSTICA II

## TEMA 2.2 CADENAS DE MARKOV EN TIEMPO CONTINUO

## **CONTENIDOS**

- 1. Definición de Cadena de Markov en Tiempo Continuo**
- 2. Comportamiento de transición**
- 3. Comportamiento estacionario**
- 4. Procesos de nacimiento y muerte**

## 1. Definición de Cadena de Markov en Tiempo Continuo

Consideremos un proceso estocástico  $\{X(t), t \geq 0\}$  en tiempo continuo que toma valores enteros no negativos.

Un proceso estocástico en tiempo continuo  $\{X(t), t \geq 0\}$  con espacio de estados  $S$  es una **cadena de Markov en tiempo continuo** si

$$\begin{aligned} P(X(t) = j \mid X(s) = i, X(t_{n-1}) = i_{n-1}, \dots, X(t_1) = i_1) \\ = P(X(t) = j \mid X(s) = i) \end{aligned}$$

donde  $0 \leq t_1 \leq t_2 \leq \dots \leq t_{n-1} \leq s \leq t$  es cualquier secuencia no decreciente de  $n+1$  tiempos e  $i_1, i_2, \dots, i_{n-1}, i, j \in S$  son  $n+1$  estados cualesquiera del conjunto  $S$ .

La CMTC verifica la propiedad de Markov  $\rightarrow$  que dado el estado del proceso en un conjunto de tiempos anteriores al instante  $t$ , la distribución del proceso en el instante  $t$  depende sólo del instante de tiempo anterior más próximo a  $t$ .

Una cadena de Markov en tiempo continuo es **homogénea** si para cada  $s \leq t$  y cada estado  $i, j \in S$ ,

$$P(X(t) = j \mid X(s) = i) = P(X(t - s) = j \mid X(0) = i)$$

No todas las CMTC tienen que ser homogéneas, pero consideraremos únicamente las CMTC homogéneas.

Por homogeneidad, cuando el proceso entra en el estado  $i$ , la forma de evolucionar probabilísticamente desde este punto es la misma que si el proceso comenzase en el estado  $i$  en el instante 0. Denotamos al **tiempo de permanencia del proceso en el estado  $i$**  como  $T_i$ .

**Proposición 1.** El tiempo de permanencia en el estado  $i$ ,  $T_i$ , se distribuye exponencialmente.

**Demostración.** Supongamos que el proceso comienza en el estado  $i$ . Para  $s \geq 0$ ,  $\{T_i > s\}$  es equivalente a  $\{X(u) = i \text{ para } 0 \leq u \leq s\}$ . De todo similar, para  $s, t \geq 0$ ,  $\{T_i > s+t\}$  es equivalente a  $\{X(u) = i \text{ para } 0 \leq u \leq s+t\}$ . Por lo tanto,

$$\begin{aligned} P(T_i > s+t \mid T_i > s) &= P(X(u) = i \text{ para } 0 \leq u \leq s+t \mid X(u) = i \text{ para } 0 \leq u \leq s) \\ &= P(X(u) = i \text{ para } s < u \leq s+t \mid X(u) = i \text{ para } 0 \leq u \leq s) \\ &= P(X(u) = i \text{ para } s < u \leq s+t \mid X(s) = i) \\ &= P(X(u) = i \text{ para } 0 < u \leq t \mid X(0) = i) = P(T_i > t), \end{aligned}$$

donde, la segunda igualdad se obtiene porque  $P(A \cap B \mid A) = P(B \mid A)$ , donde  $A = \{X(u) = i \text{ para } 0 \leq u \leq s\}$  y  $B = \{X(u) = i \text{ para } s \leq u \leq s+t\}$ , la tercera igualdad se obtiene de la propiedad de Markov y la cuarta de la homogeneidad.

Por lo tanto, la distribución de  $T_i$  tiene la propiedad de pérdida de memoria, lo que implica que es exponencial.

**Definición alternativa de CMTC.** Un proceso estocástico en tiempo continuo  $\{X(t), t \geq 0\}$  es una **cadena de Markov en tiempo continuo** si:

- Cuando entra en un estado  $i$ , el tiempo que permanece en él se distribuye exponencialmente con media  $1/v_i$ .
- Cuando abandona el estado  $i$ , entra en el estado  $j$  con probabilidad de transición  $p_{ij}$ , con  $p_{ii} = 0$  y  $\sum_j p_{ij} = 1$ .

La matriz  $\mathbf{P}$ , formada por las probabilidades  $p_{ij}$ , es una matriz estocástica y, por lo tanto, la matriz de probabilidades de transición en un paso de una CMTD. Designaremos a esta CMTD como la **cadena de Markov encajada**.

Una CMTC se comporta como una CMTD, pero con intervalos de **tiempo de permanencia** en cada estado distribuidos exponencialmente e independientes.

**Ejemplos: Proceso de Poisson de tasa 1, Proceso de Yule y Sistema de dos procesadores secuenciales.**

## 2. Comportamiento de transición

En las CMTD se estudiaron las probabilidades de transición en  $n$  pasos,  $p_{ij}^{(n)}$ . El homólogo en CMTC es la **función de probabilidad de transición**

$$p_{ij}(t) = P(X(t) = j \mid X(0) = i),$$

es decir, la probabilidad de que estando inicialmente en el estado  $i$ , después de  $t$  unidades de tiempo estemos en el estado  $j$ .

En las CMTC no podemos hablar de pasos. Para cada par de estados  $i, j \in S$ , la función de probabilidad de transición  $p_{ij}(t)$  es una función continua de  $t$ .

En general, es difícil o imposible determinar la función de probabilidad de transición aunque en casos sencillos se puede calcular. **Por ejemplo**, en los procesos de Poisson hemos visto que para  $i \leq j$ ,

$$p_{ij}(t) = P(N(t) = j - i) = e^{-\lambda t} \frac{(\lambda t)^{j-i}}{(j-i)!}.$$

**Proposición 2** (Ecuaciones de Chapman-Kolmogorov). Sea la CMTC  $\{X(t), t \geq 0\}$  con espacio de estados  $S$ . Entonces, para cada  $s, t \geq 0$ ,

$$p_{ij}(t+s) = \sum_{k \in S} p_{ik}(t) p_{kj}(s).$$

**Demostración.** La relación anterior se tiene de la siguiente cadena de igualdades

$$\begin{aligned} p_{ij}(t+s) &= P(X(t+s) = j \mid X(0) = i) \\ &= \sum_{k \in S} P(X(t+s) = j, X(t) = k \mid X(0) = i) \\ &= \sum_{k \in S} P(X(t+s) = j \mid X(t) = k, X(0) = i) P(X(t) = k \mid X(0) = i) \\ &= \sum_{k \in S} P(X(t+s) = j \mid X(t) = k) P(X(t) = k \mid X(0) = i) \\ &= \sum_{k \in S} p_{kj}(s) p_{ik}(t) \end{aligned}$$



Los valores fundamentales que especificaban una CMTD eran las probabilidades de transición  $p_{ij}$ . En tiempo continuo, son las **tasas instantáneas de transición**  $q_{ij} = v_i p_{ij}$ , que representan la tasa a la que se hacen transiciones de  $i$  a  $j$ .

Observemos que determinan la cadena, puesto que

$$v_i = \sum_j v_i p_{ij} = \sum_j q_{ij},$$

$$p_{ij} = \frac{q_{ij}}{\sum_j q_{ij}}.$$

**Objetivo:** proporcionar un **stma. de ecuac. diferenciales** para calcular  $p_{ij}(t)$ .

$$\begin{aligned} p'_{ij}(t) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{p_{ij}(t+h) - p_{ij}(t)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sum_{k=0}^{\infty} p_{ik}(t) p_{kj}(h) - p_{ij}(t)}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sum_{k \neq j} p_{ik}(t) p_{kj}(h) - p_{ij}(t)(1 - p_{jj}(h))}{h} \\ &= \sum_{k \neq j} p_{ik}(t) \lim_{h \rightarrow 0} \frac{p_{kj}(h)}{h} - p_{ij}(t) \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1 - p_{jj}(h)}{h}. \end{aligned}$$

Después de operar obtenemos que

$$\begin{aligned} p'_{ij}(t) &= \sum_{k \neq j}^{\infty} p_{ik}(t) \lim_{h \rightarrow 0} \frac{p_{kj}(h)}{h} - p_{ij}(t) \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1 - p_{jj}(h)}{h} \\ &= \sum_{k \neq j}^{\infty} p_{ik}(t) q_{kj} - p_{ij}(t) v_j. \end{aligned}$$

**Teorema 1** (Ecuaciones diferenciales hacia atrás de Kolmogorov). Bajo condiciones adecuadas,  $\forall i, j, t \geq 0$

$$p'_{ij}(t) = \sum_{k \neq j}^{\infty} p_{ik}(t) q_{kj} - p_{ij}(t) v_j.$$

**Ejemplo (Continuación del ejemplo de Proceso de Poisson de tasa  $\lambda$ )**

Como  $q_{i,i+1} = \nu_i p_{i,i+1} = \nu_i = \lambda$  y  $q_{ij} = \nu_i p_{ij} = 0$ ,  $\forall j \neq i+1$ , las ecuaciones diferenciales hacia atrás de Kolmogorov son

$$p'_{ij}(t) = p_{i,j-1}(t) \lambda - p_{ij}(t) \lambda.$$

**Ejemplo (Continuación del ejemplo de Proceso de Yule)** Como  $q_{i,i+1} = \nu_i p_{i,i+1} = i\lambda$  y  $q_{ij} = \nu_i p_{ij} = 0$ ,  $\forall j \neq i+1$ , las ecuaciones diferenciales hacia atrás de Kolmogorov son

$$p'_{ij}(t) = p_{i,j-1}(t) (j-1) \lambda - p_{ij}(t) j \lambda.$$

**Ejemplo (Continuación del ejemplo de sistema con dos procesadores secuenciales)**

Las ecuaciones diferenciales hacia atrás de Kolmogorov en **forma matricial**:

$$\mathbf{P}_0(t) = \mathbf{G} \mathbf{P}(t) ,$$

donde  $\mathbf{P}(t)$  y  $\mathbf{P}_0(t)$  las matrices formadas por los elementos  $p_{ij}(t)$  y  $p'_{ij}(t)$  , respectivamente, y  $\mathbf{G}$  (**generador infinitesimal o generador**) en la que los elementos  $(i, i)$  tienen valor  $-v_i$  y los elementos  $(i, j)$  , con  $i \neq j$ , el valor  $q_{ij}$ .

A la hora de obtener las ecuaciones diferenciales, si hubiéramos condicionado a  $X(t)$  en lugar de a  $X(s)$  , habríamos obtenido otro conjunto de ecuaciones diferenciales llamadas **ecuaciones diferenciales hacia adelante de Kolmogorov**, las cuales escritas en forma matricial son

$$\mathbf{P}_0(t) = \mathbf{P}(t) \mathbf{G} .$$

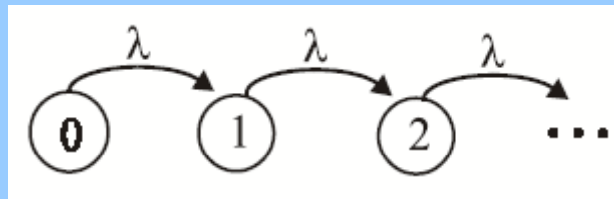
Para ambas ecuaciones, tenemos la condición límite  $\mathbf{P}(0)=\mathbf{I}$ , donde  $\mathbf{I}$  es la matriz identidad.

Las ecuaciones hacia atrás y hacia adelante, con la anterior condición límite, tienen la misma solución:

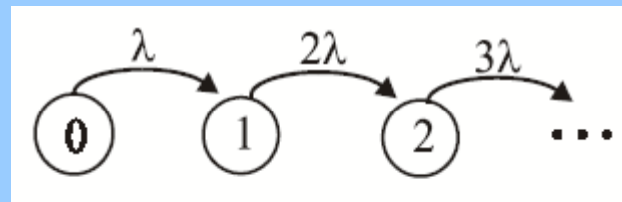
$$\mathbf{P}(t) = e^{t\mathbf{G}} \equiv \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(t\mathbf{G})^n}{n!} = \mathbf{I} + t\mathbf{G} + \frac{(t\mathbf{G})^2}{2!} + \frac{(t\mathbf{G})^3}{3!} + \dots$$

Las CMTC se pueden representar mediante un **diagrama de transición**: grafo en el que los nodos representan estados, un arco entre  $i$  y  $j$  describe la posibilidad de transición de  $i$  a  $j$  y  $q_{ij}$  se representa sobre el arco correspondiente.

**Ejemplo (Continuación del ejemplo de Proceso de Poisson de tasa  $\lambda$ )**



**Ejemplo (Continuación del ejemplo de Proceso de Yule)**



**Ejemplo (Continuación del ejemplo de Sistema con dos procesadores secuenciales)**

### 3. Comportamiento estacionario

Sea  $\{X(t), t \geq 0\}$  una CMTC con matriz de funciones de probabilidad de transición  $\mathbf{P}(t)$ . Un vector  $\boldsymbol{\pi}$ , con  $\pi_i \geq 0 \forall i$  y  $\sum_i \pi_i = 1$ , se dice que es una distribución estacionaria si  $\boldsymbol{\pi} = \boldsymbol{\pi}\mathbf{P}(t)$ ,  $\forall t \geq 0$ .

Veamos cómo utilizar el generador  $\mathbf{G}$  para determinar la distribución estacionaria:

$$\begin{aligned} \pi \text{ es estacionaria} &\Leftrightarrow \boldsymbol{\pi} = \boldsymbol{\pi}\mathbf{P}(t), \forall t \geq 0 \Leftrightarrow \boldsymbol{\pi} = \boldsymbol{\pi} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(t\mathbf{G})^n}{n!}, \forall t \geq 0 \\ &\Leftrightarrow \mathbf{0} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{t^n}{n!} \boldsymbol{\pi}\mathbf{G}^n, \forall t \geq 0 \Leftrightarrow \mathbf{0} = \boldsymbol{\pi}\mathbf{G}^n, \forall n \geq 1 \\ &\Leftrightarrow \mathbf{0} = \boldsymbol{\pi}\mathbf{G}. \end{aligned}$$

Así, la condición  $\boldsymbol{\pi} = \boldsymbol{\pi}\mathbf{P}(t)$ ,  $\forall t \geq 0$ , la cual es muy difícil de resolver, se reduce a la mucho más simple  $\mathbf{0} = \boldsymbol{\pi}\mathbf{G}$ . Por lo tanto, la distribución estacionaria  $\boldsymbol{\pi}$ , si existe, se obtiene resolviendo el sistema

$$\begin{cases} \mathbf{0} = \boldsymbol{\pi} \mathbf{G} \\ \sum_i \pi_i = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 0 = -v_j \pi_j + \sum_{i \neq j} q_{ij} \pi_i \\ \sum_i \pi_i = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} v_j \pi_j = \sum_{i \neq j} q_{ij} \pi_i \\ \sum_i \pi_i = 1 \end{cases}$$

**Lado izquierdo**  $\rightarrow \pi_j$  es la proporción de tiempo a largo plazo que el proceso está en el estado  $j$ , mientras que  $v_j$  es la tasa de abandono del estado  $j$  cuando el proceso está en él. Así,  $v_j \pi_j$  es interpretado como la **tasa a largo plazo de dejar el estado  $j$** .

**Lado derecho**  $\rightarrow q_{ij}$  es la tasa de ir al estado  $j$  cuando el proceso está en el estado  $i$ , así  $q_{ij} \pi_i$  se interpreta como la tasa a largo plazo de ir del estado  $i$  al  $j$ . Luego,  $\sum_{i \neq j} q_{ij} \pi_i$  representa la **tasa a largo plazo de ir al estado  $j$** .

Por lo tanto, la tasa a largo plazo de salida del estado  $j$  coincide con la tasa de entrada en el estado  $j$ , y por esta razón las ecuaciones  $0 = \boldsymbol{\pi} \mathbf{G}$  se denominan **ecuaciones de equilibrio global** o simplemente **ecuaciones de equilibrio**.



**Teorema 2.** En una cadena de Markov en tiempo continuo, si existe una distribución estacionaria  $\pi$ , entonces es única y

$$\lim_{t \rightarrow \infty} p_{ij}(t) = \pi_j, \quad \forall i.$$

**Ejemplo (Continuación del ejemplo de proceso de Poisson de tasa  $\lambda$ )** Las ecuaciones de equilibrio para un proceso de Poisson de tasa  $\lambda$  son

$$\begin{aligned} \lambda \pi_j &= \lambda \pi_{j-1}, \quad \forall j \\ \sum_i \pi_i &= 1 \end{aligned}$$

que no tienen solución.

**Ejemplo (Continuación del ejemplo de proceso de Yule)** Las ecuaciones de equilibrio para un proceso de Yule de tasa  $\lambda$  son

$$\begin{aligned} j \lambda \pi_j &= (j-1) \lambda \pi_{j-1}, \quad \forall j \\ \sum_i \pi_i &= 1 \end{aligned}$$

que no tienen solución.

#### 4. Procesos de Nacimiento y Muerte

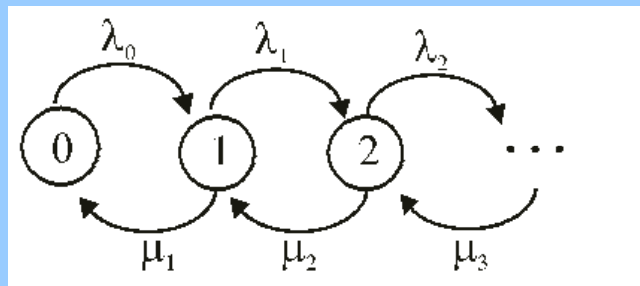
Los **procesos de nacimiento y muerte**, básicamente, describen sistemas cuyo estado, en cada instante, representa el número de individuos en el mismo. Cuando éste es  $n$ , se producen llegadas con tasa exponencial  $\lambda_n$  y salidas con tasa exponencial  $\mu_n$ , de forma independiente.

Un **proceso de nacimiento y muerte** con tasas de llegada (nacimiento)  $\{\lambda_n\}_{n=0}^{\infty}$  y tasas de salida (muerte)  $\{\mu_n\}_{n=1}^{\infty}$  es una CMTC con espacio de estados  $\{0, 1, 2, \dots\}$ , tasas de permanencia  $v_0 = \lambda_0$ ,  $v_i = \lambda_i + \mu_i$ ,  $i > 0$  y probabilidades de transición

$$\begin{aligned} p_{01} &= 1, & p_{0i} &= 0, \text{ para } i \neq 1, \\ p_{i,i+1} &= \frac{\lambda_i}{\lambda_i + \mu_i}, & p_{i,i-1} &= \frac{\mu_i}{\lambda_i + \mu_i}, \\ p_{ij} &= 0, \quad j \neq i+1, i-1, \text{ para } i \neq 0. \end{aligned}$$

El **proceso de Poisson** es un proceso de nacimiento y muerte con  $\lambda_n = \lambda$  y  $\mu_n = 0$ ,  $\forall n$ . El **proceso de Yule** es también un proceso de nacimiento y muerte con  $\lambda_n = n\lambda$  y  $\mu_n = 0$ ,  $\forall n$ .

El **diagrama de transición** de un proceso de nacimiento y muerte es



Sus **tasas de transición** son

$$q_{01} = \lambda_0, \quad q_{i,i+1} = \lambda_i, \quad q_{i,i-1} = \mu_i,$$

y el resto 0, con lo que el sistema de **ecuaciones diferenciales de Kolmogorov** es

$$\begin{aligned} p'_{i0}(t) &= p_{i1}(t) \mu_1 - p_{i0}(t) \lambda_0 \\ p'_{ij}(t) &= p_{i,j+1}(t) \mu_{j+1} + p_{i,j-1}(t) \lambda_{j-1} - p_{ij}(t) (\lambda_j + \mu_j) \end{aligned}$$

Resolverlo es complicado, pero conducen de forma sencilla al **sistema en equilibrio**

$$\begin{aligned}\lambda_0 \pi_0 &= \mu_1 \pi_1 \\ (\lambda_j + \mu_j) \pi_j &= \mu_{j+1} \pi_{j+1} + \lambda_{j-1} \pi_{j-1}, \quad j = 1, 2, \dots \\ \sum_j \pi_j &= 1\end{aligned}$$

o bien

$$\begin{aligned}\lambda_0 \pi_0 &= \mu_1 \pi_1 \\ (\lambda_1 + \mu_1) \pi_1 &= \mu_2 \pi_2 + \lambda_0 \pi_0 \\ (\lambda_2 + \mu_2) \pi_2 &= \mu_3 \pi_3 + \lambda_1 \pi_1 \\ \dots & \\ (\lambda_n + \mu_n) \pi_n &= \mu_{n+1} \pi_{n+1} + \lambda_{n-1} \pi_{n-1} \\ \dots & \\ \sum_n \pi_n &= 1\end{aligned}$$

descrito mediante el **equilibrio de tasas de salida y de entrada en cada estado**.

La resolución del sistema es estándar, sumando las dos primeras, las tres primeras, ecuaciones pasamos al sistema

$$\begin{aligned}\lambda_0 \pi_0 &= \mu_1 \pi_1 \\ \lambda_1 \pi_1 &= \mu_2 \pi_2 \\ \lambda_2 \pi_2 &= \mu_3 \pi_3 \\ \dots \\ \lambda_n \pi_n &= \mu_{n+1} \pi_{n+1} \\ \dots \\ \sum_n \pi_n &= 1\end{aligned}$$

y despejando  
cada  $\pi_i$  en  
función de  $\pi_0$

$$\begin{aligned}\pi_1 &= \frac{\lambda_0}{\mu_1} \pi_0 \\ \pi_2 &= \frac{\lambda_1}{\mu_2} \pi_1 = \frac{\lambda_1 \lambda_0}{\mu_2 \mu_1} \pi_0 \\ \pi_3 &= \frac{\lambda_2}{\mu_3} \pi_2 = \frac{\lambda_2 \lambda_1 \lambda_0}{\mu_3 \mu_2 \mu_1} \pi_0 \\ \dots \\ \pi_n &= \frac{\lambda_{n-1}}{\mu_n} \pi_{n-1} = \frac{\lambda_{n-1} \cdots \lambda_0}{\mu_n \cdots \mu_1} \pi_0 \\ \dots \\ \sum_n \pi_n &= 1\end{aligned}$$

Sustituimos los valores de  $\pi_i$  en la última ecuación y despejamos  $\pi_0$ , obteniendo

$$\pi_0 = \frac{1}{1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\lambda_{n-1} \cdots \lambda_0}{\mu_n \cdots \mu_1}}$$

con lo cual,

$$\pi_n = \frac{\lambda_{n-1} \cdots \lambda_0}{\mu_n \cdots \mu_1 \left( 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\lambda_{n-1} \cdots \lambda_0}{\mu_n \cdots \mu_1} \right)}.$$

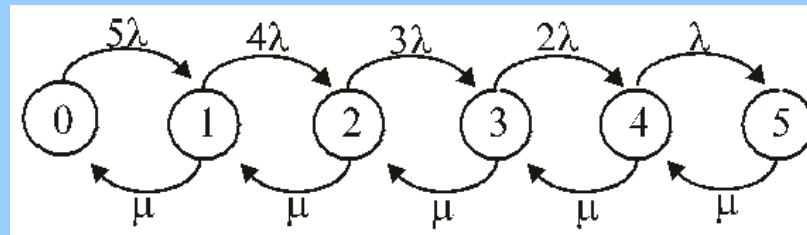
Claramente, una condición necesaria para que exista la distribución estacionaria es que

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\lambda_{n-1} \cdots \lambda_0}{\mu_n \cdots \mu_1} < \infty.$$

comprobándose que esta condición es también suficiente para la existencia de la distribución.

**Ejemplo.** En una empresa hay 5 servidores y un técnico que los mantiene. Supongamos que el tiempo que tardan en fallar sigue una distribución exponencial con tasa 1 fallo cada 10 horas. La duración de la reparación es exponencial con media 2 horas. ¿Cuál es el número medio de servidores con fallos? y ¿qué proporción de tiempo a largo plazo está cada servidor en uso?

Diremos que el sistema está en el estado  $n$  si hay  $n$  servidores con fallos. Entonces, el problema puede ser modelizado como un proceso de nacimiento y muerte con diagrama de transición



donde  $\lambda=1/10$ ,  $\mu=1/2$  y las tasas son

$$\lambda_n = \begin{cases} (5 - n) \lambda, & \text{si } n \leq 5 \\ 0, & \text{si } n > 5 \end{cases} \quad \text{y} \quad \mu_n = \begin{cases} \mu, & \text{si } 1 \leq n \leq 5 \\ 0, & \text{si } n > 5 \end{cases}$$

Las ecuaciones en equilibrio son

$$\left\{ \begin{array}{l} 5\lambda\pi_0 = \mu\pi_1 \\ (4\lambda + \mu)\pi_1 = 5\lambda\pi_0 + \mu\pi_2 \\ (3\lambda + \mu)\pi_2 = 4\lambda\pi_1 + \mu\pi_3 \\ (2\lambda + \mu)\pi_3 = 3\lambda\pi_2 + \mu\pi_4 \\ (\lambda + \mu)\pi_4 = 2\lambda\pi_3 + \mu\pi_5 \\ \mu\pi_5 = \lambda\pi_4 \\ \sum_{i=0}^5 \pi_i = 1 \end{array} \right. \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} 5\lambda\pi_0 = \mu\pi_1 \\ 4\lambda\pi_1 = \mu\pi_2 \\ 3\lambda\pi_2 = \mu\pi_3 \\ 2\lambda\pi_3 = \mu\pi_4 \\ \lambda\pi_4 = \mu\pi_5 \\ \sum_{i=0}^5 \pi_i = 1 \end{array} \right.$$

y sustituyendo por su valor se obtiene

$$\left\{ \begin{array}{l} 5/10\pi_0 = 1/2\pi_1 \\ 4/10\pi_1 = 1/2\pi_2 \\ 3/10\pi_2 = 1/2\pi_3 \\ 2/10\pi_3 = 1/2\pi_4 \\ 1/10\pi_4 = 1/2\pi_5 \\ \sum_{i=0}^5 \pi_i = 1 \end{array} \right. \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \pi_0 = 0.02734 \\ \pi_1 = 0.02734 \\ \pi_2 = 0.03416 \\ \pi_3 = 0.05694 \\ \pi_4 = 0.14237 \\ \pi_5 = 0.71185 \end{array} \right.$$



Por lo tanto, el número medio de servidores con fallos es  $\sum_{n=0}^5 n\pi_n = 4.395$  y la proporción de tiempo a largo plazo que está cada servidor en uso es (teorema de la probabilidad total).

$$\begin{aligned} P(\text{servidor sin fallos}) &= \sum_{n=0}^5 P(\text{servidor sin fallos} \mid n \text{ servidores con fallos}) \pi_n \\ &= \sum_{n=0}^5 \frac{5-n}{5} \pi_n = 0.121 . \end{aligned}$$

Consideremos un proceso de nacimiento y muerte general con tasas  $\{\lambda_n\}_{n=0}^{\infty}$  y  $\{\mu_n\}_{n=1}^{\infty}$ . **Tiempo que tarda el sistema en pasar del estado  $i$  al  $i + 1$** , es decir,  $T_i$ ,  $i \geq 0$ . Calculemos  $E(T_i)$  de forma recursiva.

En primer lugar, como  $T_0 \sim \text{Exp}(\lambda_0)$  se tiene que  $E(T_0) = 1/\lambda_0$ . Para  $i > 0$ , condicionamos a que la primera transición sea a  $i-1$  o a  $i+1$ . Para ello, definimos

$$I_i = \begin{cases} 1, & \text{si la primera transición es de } i \text{ a } i+1 \\ 0, & \text{si la primera transición es de } i \text{ a } i-1 \end{cases}$$

Se tiene

$$\begin{aligned} E(T_i | I_i = 1) &= \frac{1}{\lambda_i + \mu_i} \\ E(T_i | I_i = 0) &= \frac{1}{\lambda_i + \mu_i} + E(T_{i-1}) + E(T_i) \end{aligned}$$

pues, independientemente de que la primera transición sea por nacimiento o muerte, se produce con tasa  $1/(\lambda_i + \mu_i)$ .

Luego,

$$\begin{aligned} E(T_i) &= E(E(T_i | I_i)) = E(T_i | I_i = 1) P(I_i = 1) + E(T_i | I_i = 0) P(I_i = 0) \\ &= \frac{1}{\lambda_i + \mu_i} \frac{\lambda_i}{\lambda_i + \mu_i} + \left( \frac{1}{\lambda_i + \mu_i} + E(T_{i-1}) + E(T_i) \right) \frac{\mu_i}{\lambda_i + \mu_i} \\ &= \frac{1}{\lambda_i + \mu_i} + \frac{\mu_i}{\lambda_i + \mu_i} (E(T_{i-1}) + E(T_i)), \end{aligned}$$

de donde

$$E(T_i) = \frac{1}{\lambda_i} + \frac{\mu_i}{\lambda_i} E(T_{i-1}).$$

Así, si deseamos calcular el tiempo esperado para ir del estado  $i$  al  $j$ , con  $i < j$ , tenemos que éste vale:

$$E(T_i) + E(T_{i+1}) + \cdots + E(T_{j-1}).$$